POTE Egészségügyi Szervezéstani Intézet

A fekvő- és járóbetegellátás matematikai modellezése számitógép segitségével

Gaál Aladár, Buda József és Tényi Jenő

Korunkban egyre erősebb az igény a biológiában és az orvostudományban is a matematikai apparátus felhasználására - mind a tudományos kutatómunkában: a modellezésben, mind a kisérletek kiértékelésében, a klinikák, kórházak adatainak feldolgozásában. Különösen a valószinüség-számitásnak van nagy szerepe e téren. A valószinüségi változókat tartalmazó un. sztochasztikus modellek mindjobban kiszoritják a mutatók rendszerét. Ugyanis sokkal tökéletesebben jellemzik a folyamatokat, mint valamely - sokszor erőltetve definiált - mérőszám, mutató.

Mig a jól megalkotott modell minden lényeges ismérvet tartalmaz, a mutatók a jelenségeket csak egy meghatározott aspektusból vizsgálják - igy nem alkalmasak arra, hogy segitségükkel reálisan jellemezzük a folyamatokat. Csak egy olyan modell alkalmas erre, amely a vizsgált jelenséget - a maga komplexitásában - a lehető legtökéletesebben visszaadja.

Ilyen sztochasztikus modell az un. "sorbanállási modell" is. Ennek segitségével próbálunk választ adni a fekvő- és járóbetegellátás bizonyos kérdéseire.

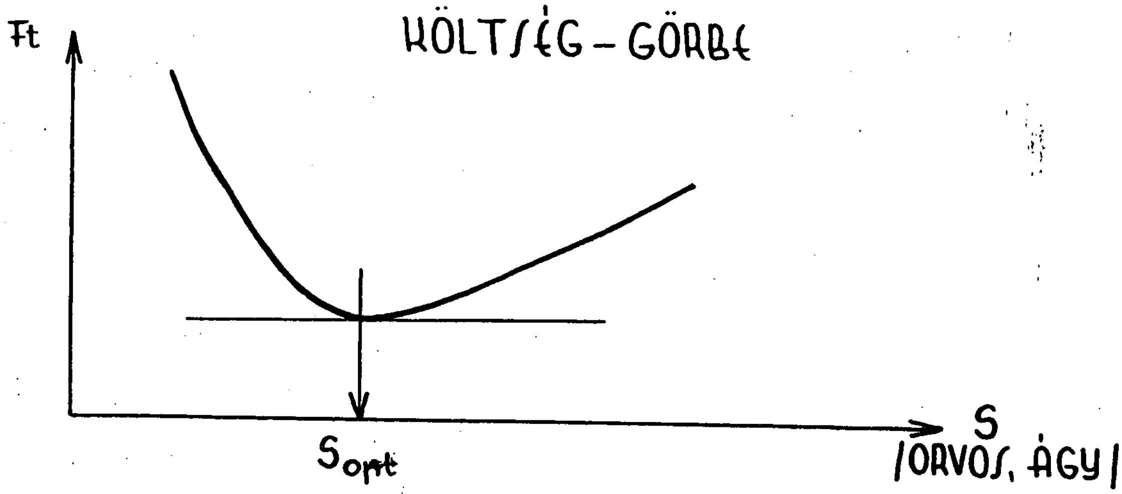
Hogy mi a sorbanállás? - azt hiszem a szó hétköznapi értelmével valamennyien tisztában vagyunk. Vannak kiszolgáló és vannak várakozó felek. A jelenség általános: találkozhatunk vele pl. egy telefonközpont méretezésénél, a repülőtéri kifutópályák számának meghatározásánál, szerszámkiadó raktári dolgozók optimális számának kiszámitásánál stb. Valamennyi hasonló jelenség, csak észre kell venni bennük a közöset, a lényeget: a várakozót és a kiszolgálót. Az emlitett modellt a külföldi irodalom, s tapasztalatok alapján csupán Intézetünk próbálta egészségügyi területre alkalmazni. Bailey, Flagle angol, Abolnyikov, Zsurkovics (1969) szovjet matematikusok eredményeinek felhasználásával 1965-ben a Pécs Városi Rendelőintézetet (rheuma, onkológia, ideg, fogászat, belgyógyászat stb. 2490 fő összesen) 1966-ban a gyermekszakrendelést, 1968-ban a szemészeti szakrendelést, 1969-ben a rheumatológiai szakrendelést elemeztük.

Mi is a probléma? Mire tud választ adni ez a matematikai apparátus? Nézzük az egészségügyi ellátást: hány orvost, illetve hány ágyat kell beállitanunk ahhoz, hogy ne kelljen tul sokat várni a kiszolgálásra, ellátásra? Minél többet - hangzik az egyszerü válasz. Csakhogy a probléma nem ilyen egyszerü. Hiszen pl. tul sok orvos esetén már nem is a betegek állnának sorba - hanem maguk az orvosok, s várnák tétlenül az olykor-olykor érkező beteget. Ez pedig, a rendszer gazdaságossági oldalát tekintve, nem mindegy.

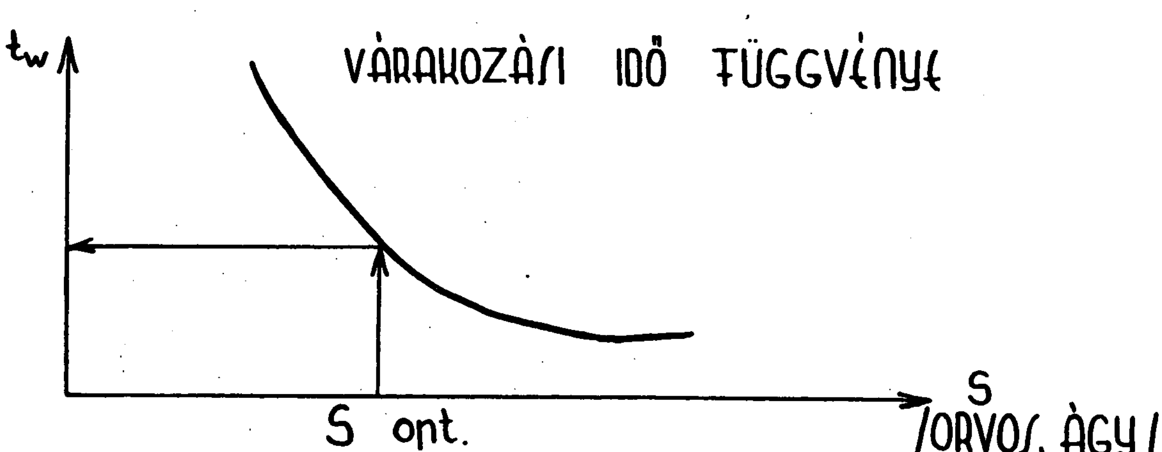
Ha tul kevés az orvos, akkor a betegek aránytalanul sokat várakoznak, s igy sok a termelésből való kiesés: ha viszont tul sok az orvos, ugy a rendelőintézet fenntartási költségei lesznek indokolatlanul magasak. Valahol a két extrém érték között van az optimum: a költséggörbe szélső értéke, minimuma. A költséggörbe jellegét az 1. ábra szemlélteti. A számszerü vizsgálatok folyamatban vannak. A vizszintes tengelyen a kiszolgáló csatornaszám, azaz az orvos - illetve az ágyszám, a függőleges tengelyre pedig a rendszer összköltsége van felvive. Ez utóbbi több tényezőből tevődik össze:

- a várakozók (betegek) részéről: az az összeg, amelyet a várakozási idő alatt a dolgozó a munkahelyén megtermelt volna.
- A kiszolgálók részéről: a rendelőintézet, kórházi osztály fenntartási költségei (bér, gyógyszer stb.)

A sorbanállásnak azonban nem csak gazdasági oldala van: a kérdést szociális, emberi szempontból is meg kell vizsgálnunk. Lehet, hogy a költséggörbe optimum pontjában leolvasható $S_{opt.}$ a csatornaszám esetén még tul sokat várnak a betegek az ellátásra. Hogy ezt megállapithassuk, ismernünk kell a kiszolgáló csatornaszám (orvos- ill. ágyszám) függvényében felvett várakozási idő görbét. Ezt, akár csak a költséggörbét, csak elméletileg lehet meghatározni. Egyetlen felmérésből - azaz egy adott S csatornaszámhoz tartozó t_w várakozási időből - még nem következtethetünk a teljes függvény kapcsolatra, ugyanis az átlagos várakozási idő nem arányosan csökken a kiszolgáló csatornaszám növelésével, mert a beérkezések véletlenszerüek. Arra viszont nincs mód, hogy felmérések kedvéért a kór-


Ft
KÖLTSÉG – GÖRBE
S
/ORVOS, ÁGY/
S opt

1. ábra


tw
VÁRAKOZÁSI IDŐ FÜGGVÉNYE
S
/ORVOS, ÁGY/
S opt.

2. ábra

házi ágyakat, illetve orvosokat átcsoportosítgassuk - s zavarjuk a rendelőintézeteket, osztályokat tevékenységükben. A várakozási idő függvényét tehát csakis elméletileg, a matematikai modellből számolva kaphatjuk meg. Ehhez s a modell többi jellemzőjének meghatározásához kellett a számítógép segítsége.

Nyilvánvaló, hogy a várakozási idő is, a beérkezett igények száma is, az ellátási idő is mind függvénye a területnek, a vizsgált szakágnak, évszaknak, napszaknak stb.

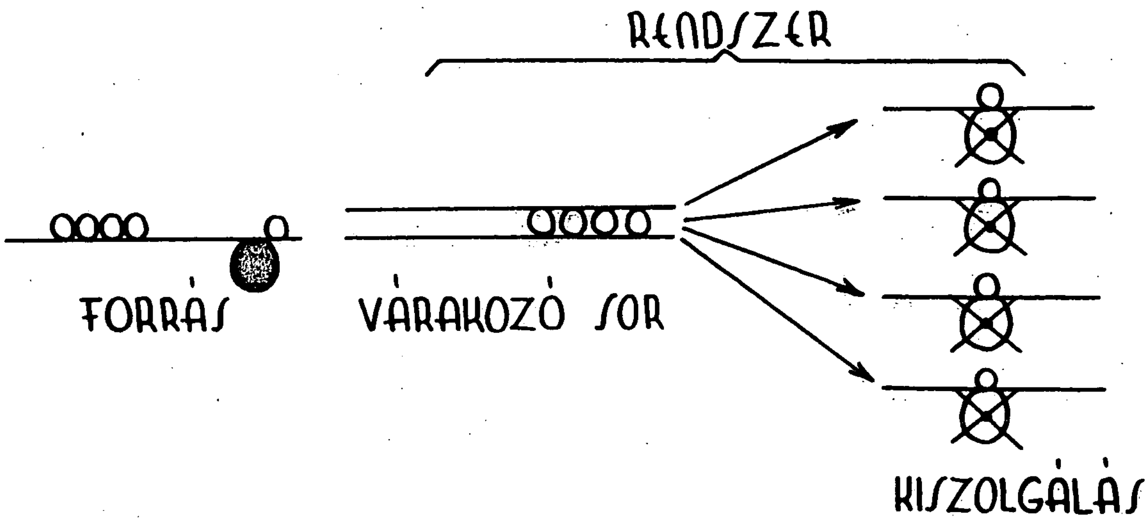
A jelentkező igényekben és az ellátási lehetőségekben az egyes szakrendelő intézetek között, vizsgálatainkkal kimutathatóan, aránytalanságok vannak. A vázolt matematikai módszer ezt is vizsgálja.

A probléma lényege tehát röviden a következő: hogyan tervezzük meg egyes szakrendelő intézetek orvoslétszámát, illetve az egyes kórházi osztályok ágyainak számát, hogy ne legyenek nagy aránytalanságok? Mekkora legyen a szükséges s elegendő tartalék ágyszám? Minderre választ ad a sorbanállási elmélet. De nem tér ki a rendszer strukturális kérdéseire s a megoldási lehetőségeket sem taglalja.

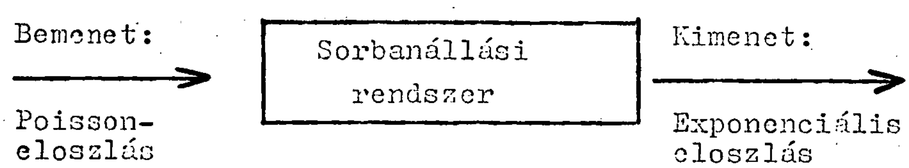
A jelenség vizsgálatához szükséges, hogy elvonatkoztassunk annak lényegtelen jegyeitől: absztraháljunk. A sorbanállási rendszer modelljét - melyet a várakozó sorok és a kiszolgáló állomások (esetünkben a betegek, illetve az orvosok és kórházi ágyak) alkotnak - a következőképp adhatjuk meg (Kaufmann 1964), (3. ábra):

A szokásos jelölések:

S = a kiszolgáló helyek száma (fekvőbetegellátásnál az ágyszám, járóbetegellátásnál az orvosszám)
ν = a sorban várakozó egységek (betegek) száma
j = a kiszolgálás alatt levő egységek száma
$(0 \leq j \leq S)$
n = a rendszerben található egységek teljes száma, vagyis a sorban és a kiszolgáló helyeken található egységek együttes száma
ρ = az üresen álló kiszolgáló helyek száma
λ = időegységenkénti beérkezések száma
μ = időegységenkénti kiszolgálások száma
t_w = az ellátás előtti várakozási idő
t_s = kiszolgálási (ellátási) idő


RENDSZER
FORRÁS
VÁRAKOZÓ SOR
KISZOLGÁLÁS

3. ábra


Bemenet:
Poisson-
eloszlás
Sorbanállási
rendszer
Kimenet:
Exponenciális
eloszlás

4. ábra

A modell négy legfontosabb paramétere a következő:

- csatornaszám (S)
- várakozási idő átlaga (t_w)
- beérkezési ráta (λ)
- kiszolgálási ráta (μ)

Bármely három ismeretében a negyedik meghatározható. A forgalom állomásonkénti intenzitása, a beérkezési és kiszolgálási ráta hányadosa:

$$\psi = \lambda/\mu$$

Az erre vonatkozó megkötés:

$$\frac{\lambda}{S\mu} < 1$$

vagyis

$$\psi < S$$

Ha ez nem teljesül, akkor a várakozó sor végtelenné válik.

A tapasztalat igazolta, hogy a véletlenszerű beérkezések gyakran Poisson-eloszlást követnek, azaz $\underline{n}$ egyed beérkezésének valószínűsége egy adott $\underline{t}$ időpontban:

$$p_n(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

A matematikai modell a kiszolgálást az exponenciális esetre tárgyalja, azaz a kiszolgálás Θ időtartamának valószínűség-eloszlása:

$$P(\Theta > \vartheta) = e^{-\mu\vartheta}$$

Ha a fentiek teljesülnek, - melyről a χ^2 próbával győződhetünk meg -, ugy a bemutatott modellünk használható.

A levezetett összefüggések a permanens állapotra vonatkoznak: vagyis a vizsgált és az átmeneti (azaz a stabilizációhoz szükséges) időszakra fennáll:

$$T_{\text{vizsgált}} \gg T_{\text{átmeneti}}$$

A részletes számitások mellőzésével, a modell főbb jellemzőire az alábbiak adódnak:

Annak valószinüsége, hogy a rendszerben n egyed tartózkodik: p_n

Stacioner, ergodikus folyamat esetén ez a következő képletből is meghatározható:

$$1 \leq n < S \qquad\qquad n \geq S$$

$$p_n = p_o \frac{\psi^n}{n!} \qquad\qquad p_n = p_o \frac{\psi^n}{S!\, S^{n-S}}$$

ahol:

$$p_o = \frac{1}{\dfrac{\psi^S}{S!\,(1-\frac{\psi}{S})} + 1 + \dfrac{\psi}{1} + \dfrac{\psi^2}{2!} + \dots + \dfrac{\psi^{S-1}}{(S-1)!}}$$

p_o ismeretében rekurziv formulával:

$$p_n = \frac{\psi}{n} p_{n-1} \qquad \text{ha} \qquad 1 \leq n < S$$

és

$$p_n = \frac{\psi}{S} p_{n-1} \qquad \text{ha} \qquad n \geqslant S$$

A várakozás valószinüsége:

$$p = P\,(t_w > 0) = P\,(n \geqslant S) = \sum_{n=S}^{\infty} p_n = p_S + p_{S+1} + p_{S+2} + \dots$$

vagy

$$p = P\,(t_w > 0) = P\,(n \geqslant S) = \frac{\psi^S}{S!\,(1 - \frac{\psi}{S})}\, p_o$$

azaz (Erlang-képlet):

$$p = P(t_w > 0) = P(n \geqslant S) =$$

$$= \frac{\dfrac{\psi^S}{S!\,(1 - \frac{\psi}{S})}}{\dfrac{\psi^S}{S!\,(1 - \frac{\psi}{S})} + 1 + \dfrac{\psi}{1} + \dfrac{\psi^2}{2!} + \dots + \dfrac{\psi^{S-1}}{(S-1)!}}$$

Mivel:

$$\bar{\nu} = \lambda \bar{t}_w$$

ebből az átlagos t_w sorbanállási idő:

$$t_w = \frac{\bar{\nu}}{\lambda} = \frac{\psi^S}{S\,S!\,\mu(1-\frac{\psi}{S})^2}\,p_o$$

A rendszerben található egységek $\bar{n}$ átlagos száma:

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} np_n$$

A várakozó sorbanálló egységek $\bar{\nu}$ átlaga:

$$\bar{\nu} = \sum_{n=S+1}^{\infty} (n-S)\,p_n$$

vagy:

$$\bar{\nu} = \frac{\psi^{S+1}}{S\,S!\,(1-\frac{\psi}{S})^2}\,p_o$$

Az el nem foglalt állomások $\bar{\rho}$ átlagos száma:

$$\bar{\rho} = \sum_{n=0}^{S} (S-n)p_n = S - \gamma$$

Az $\bar{n}$, $\bar{\nu}$ és $\bar{\rho}$ átlagok közötti összefüggés:

$$\bar{n} = \bar{\nu} + S - \bar{\rho} = \bar{\nu} + \gamma$$

A várakozó sorbanálló egységek ($\bar{\nu}$) és az üres állomások ($\bar{\rho}$) számának ismeretében a sorbanállási költség időegységenként:

$$\Gamma_S = c_1 \sum_{n=S+1}^{\infty} (n-S)p_n + c_2 \sum_{n=0}^{S} (S-n)p_n$$

azaz:

$$\Gamma_S = c_1\bar{\nu} + c_2\bar{\rho}$$

ahol:

c_1 = a várakozó felek költsége időegységenként
c_2 = a kiszolgáló állomások költsége időegységenként

A számitások meglehetősen hosszadalmasak - különösen a fekvőbeteg-ellátásnál, ahol az S csatornaszám (ágyszám) nagy érték. (Pl. gyermekszakrend. 500 fő, szemészet 600 fő, rheumatológia 1100 fő, Pécs Város II. ker. Rendelőint. 2500 fő.) A kiértékelés megkönnyitésére programot készitettünk Algol nyelven (Gier computerre).

A számitógépes analizis eredményeit maga a computer táblázatos formában nyomtatta ki, melynek segitségével még a laikusok is könnyen és gyorsan meghatározhatják az adott, megengedhető várakozási időhöz szükséges orvos- illetve ágyszámot.

Ehhez meg kell állapitanunk a kiszemelt szakrendelés, ellátási terület forgalmi intenzitását, azaz az igények és a kiszolgálás mértékét. A mintából - valószinüségszámitási módszerek segitségével - következtethetünk az általános értékekre. Tehát mérni csak a λ, μ értékét kell, a többi ezekből számolható.

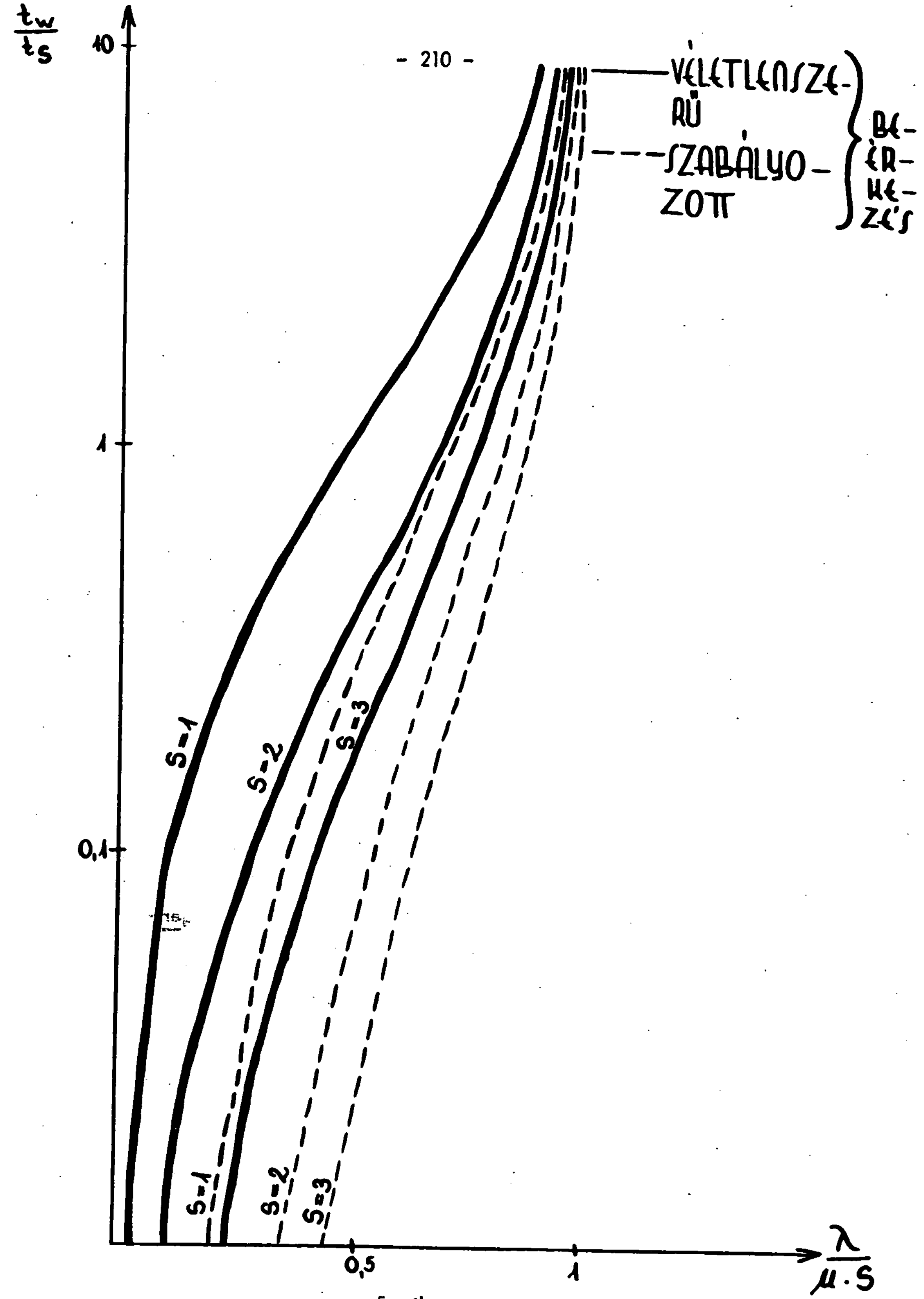
Természetesen a módszer alkalmasságának vizsgálatakor valamennyi paramétert mértük s összehasonlitottuk a számitottakkal.

Hogy mekkora segitséget nyujtott a computer a kiértékelésben, azt talán legjobban a következő adat érzékelteti:

Egy adott forgalomintenzitás esetén kb. S = 50 csatorna mellett az összes elvégzendő számitást - még asztali elektronikus számológépen!! (Hunor) is kb. egy egész napot vett igénybe. Ezzel szemben a computer 3 óra alatt cca. 10.000 elvileg lehetséges esetet analizált. Vagyis, ha mindezt asztali számológépen végeztük volna el, ugy kb. 10.000 napig, azaz kb. 25-3o évig dolgozhattunk volna rajta - 3 óra helyett! A számitógép által kinyomtatott táblázatok a felméréseek kiértékelésében rendkivül nagy segitséget nyujtottak, ugyanis szimulációval (azaz lejátszva a különböző eshetőségeket) egy-egy rendelőintézet tevékenységét számos oldalról megvizsgálhattuk. Több helyen tapasztaltuk, hogy az adott szakrendelés orvosszükséglete - ha nem is elegendő - de a körülményekhez képest kielégitő, ennek ellenére a betegek aránytalanul sokat várnak. Ilyen esetekben nem az orvosszám növelésével, hanem ésszerübb szervezéssel kell ezen segiteni! Pl. egy belgyógyászati szakrendelésen az átlagos várakozási időt kb. 150 percnek mértük. Ez lényegesen több volt, mint amennyit a modellből számitottunk (61 perc). De ugyanezen beteganyaggal lejátszva a rendelést - a betegek érkezési sorrendjében, a várakozási idő már jól megközelitette az elméleti értéket (67 perc).

Tehát, ha egy rendszer, amely matematikailag igazolhatóan elegendő kiszolgáló csatornával rendelkezik, nem müködik jól, akkor nem a kiszolgálók számának növelésével, hanem a rendszer átszervezésével kell azon segiteni! Meg kell keresnünk, hogy hol szük a rendszer keresztmetszete.

Az egészségügyi irányitó szerveknek kell a matematikai analizis eredményeit a gyakorlatban hasznositani. Pl. nagymértékben csökkenthető a várakozási idő a beérkezések szabályozásával is. Ennek gyakorlati megvalósitása lehet pl. a visszarendeléses rendszer. A véletlenszerü és szabályozott beérkezés esetén a relativ várakozási idő változását az 5. ábra diagrammja szemlélteti.


tw / ts
10
1
0,1
VÉLETLENSZE-RŰ
SZABÁLYO-ZOTT
BE-ÉR-KE-ZÉS
S=1
S=2
S=3
S=1
S=2
S=3
0,5
1
λ / μ·S

5. ábra

Ahol nem a fent emlitett hibák állottak fenn, illetve nem volt lehetőség a vázolt megoldásokra, ott az orvos-, illetve ágyszámot kellett - az igényeknek megfelelő mértékben - megváltoztatni.

A szimulációk további eredményei is igen tanulságosak voltak, azonban a rövid előadásban nincs mód ezek taglalására.

Intézetünk a fenti módszert az eddigi jó tapasztalatok alapján széles körben kivánja alkalmazni különböző tipusu rendelőintézetek vizsgálatában: Igy pl. pécsi nagyvárosi önálló (30.000 fő), mohácsi kisvárosi kórház rendelőintézetnél (3.000 fő) és enyingi járási rendelőintézetnél (2.500 fő).

A bemutatott módszer láthatóan alkalmas a korszerü technika: a computerek segitségével - a járó- és fekvőbetegellátás számos problémájának megoldására, az orvosok, illetve kórházi ágyak ésszerü átcsoportositásával, elosztásával, egészségügyi ellátásunk gazdaságosabbá, humánusabbá tételére.

IRODALOM

A. Y. Khintchine: Mathematical methods in the theory of queueing Charles Griffin and Company Limited London, 1957.

Abolnikov, Zsurkovics: K voproszi ob obcenke dejatelnoszti medicinszkih ucsrezsdenij v terminah i ponjatijah teorii masszevogo obszluzsivanija Szovjetszkoe zdravoohranenie Moszkva, 1969.

Kaufmann, A.: Az optimális programozás, Müszaki Könyvkiadó, Budapest, 1964.

Kendall, D. G.: Stochastic processes occuring in the theory of queues and their analysis by the method ot the imbedded Markov chain. Annals of Mathematical Statistics Vol. 23., 1963. pp. 338-354.